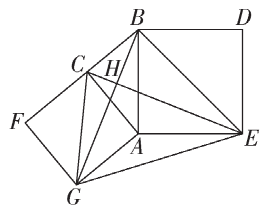
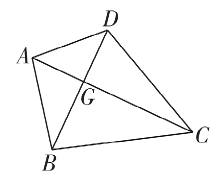
方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，$\therefore BA=EA$，$AG=AC$，$\angle EAB=\angle CAG=90°$，$\therefore \angle CAE=\angle GAB=90°+\angle BAC$，$\therefore \triangle ACE\cong\triangle AGB(\mathrm{SAS})$，$\therefore \angle AEC=\angle ABG$，$\therefore \angle HEB+\angle HBE=\angle HEB+\angle ABE+\angle ABG=\angle HEB+\angle ABE+\angle AEC=90°$，

$\therefore \angle BHE=90°$，$\therefore CE\perp BG$，

$\therefore$ 四边形 $BCGE$ 是“垂美四边形”.



图(1)



图(2)

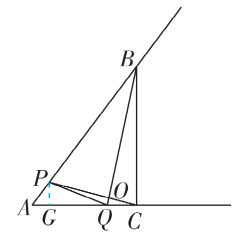
(2) $DC^2+AB^2=AD^2+BC^2$. 理由如下：

如图(2)，设 AC 与 BD 交于点 G.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是“垂美四边形”，$\therefore AC\perp BD$，$\therefore DC^2=GD^2+CG^2$，$AD^2=GD^2+GA^2$，$AB^2=BG^2+GA^2$，$BC^2=GC^2+GB^2$.

$\because DC^2+AB^2=GD^2+CG^2+BG^2+GA^2$，$AD^2+BC^2=GD^2+GA^2+GC^2+GB^2$，$\therefore DC^2+AB^2=AD^2+BC^2$.

(3) t 的值是 $\frac{1}{9}$ 或 $\frac{9}{7}$. 如图(3)，作 $PG\perp AC$ 于点 G，则 $\angle AGP=\angle CGP=90°$.



图(3)

$\because \angle ACB=90°$，$AC=3$，$BC=4$，

$\therefore BA=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$.

$\because \angle AGP=\angle ACB=90°$，$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle APG\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{AP}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{PG}{BC}$，$\therefore \frac{AP}{5}=\frac{AG}{3}=\frac{PG}{4}$. $\because AP=5t$，$AQ=21t$，$\therefore AG=\frac{3}{5}AP=\frac{3}{5}\times 5t=3t$，$PG=\frac{4}{5}AP=\frac{4}{5}\times 5t=4t$，$CQ=|3-21t|$，

$\therefore GQ=AQ-AG=21t-3t=18t$，$BP=|5-5t|$，$\therefore PQ^2=PG^2+GQ^2=(4t)^2+(18t)^2$. $\because$ 以点 B，C，P，Q 为顶点的四边形是“垂美四边形”，$\therefore$ 结合题意可知，只存在 $BQ\perp CP$ 这一种情况. 由(2)得 $PQ^2+BC^2=PB^2+CQ^2$，$\therefore (4t)^2+(18t)^2+4^2=(5-5t)^2+(3-21t)^2$，整理得 $63t^2-88t+9=0$，解得 $t=\frac{1}{9}$ 或 $t=\frac{9}{7}$，

$\therefore t$ 的值是 $\frac{1}{9}$ 或 $\frac{9}{7}$.

第六章　圆

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

1. C 【解析】根据题意，得 $\angle A$ 和 $\angle BOC$ 分别是 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角和圆心角，$\therefore \angle A=\frac{1}{2}\angle BOC$. $\because \angle A=45°$，$\therefore \angle BOC=2\angle A=2\times 45°=90°$. 故选 C.

2. B 【解析】$\because OE\perp AB$，$\therefore AE=EB=\frac{1}{2}AB=4$，$\therefore OA=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$. 故选 B.

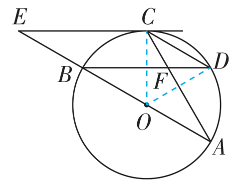
3. C 【解析】$\because \angle AOB=40°$，$\angle OCA=30°$，$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=20°$，$\therefore \angle BCO=\angle OCA+\angle ACB=30°+20°=50°$. 故选 C.

4. C 【解析】由题意得，$\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC=25°$，$\therefore$ 劣弧 AB 的长为 $\frac{25\pi\times R}{180}=\frac{5\pi}{36}R$（千米）. 故选 C.

5. 4π 【解析】扇形的面积为 $\frac{90\pi\times 4^2}{360}=4\pi$. 故答案为 4π.

6. 6 【解析】$\because AB=OA$，$OA=OB$，$\therefore AB=OA=OB$，$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，$\therefore \angle OAC=60°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$\because AC=3$，$\therefore OA=\frac{AC}{\cos 60°}=6$，故答案为 6.

7. (1) 2π　(2) $\frac{1}{2}$ 【解析】(1) 如图，连接 OC，OD. $\because$ 点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，



$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$. 又 $\because \angle A=30°$，

$\therefore \angle BOC=\angle COD=2\angle A=60°$，$\therefore \angle BOD=120°$. $\because AB=6$，$\therefore OB=\frac{1}{2}AB=3$，$\therefore l_{\overset{\frown}{BD}}=\frac{120}{180}\times\pi\times 3=2\pi$，故答案为 2π.

(2) $\because$ 点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore OC\perp BD$.

$\because EC$ 是 $\odot O$ 的切线，C 为切点，$\therefore OC\perp EC$，$\therefore EC/\!/BD$，

$\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{EB}{AB}$.

$\because \frac{CF}{AF}=\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{EB}{AB}=\frac{1}{3}$.

设 $EB=2a$，则 $AB=6a$，$BO=CO=3a$，$\therefore EO=EB+BO=5a$，

$\therefore EC=\sqrt{EO^2-CO^2}=\sqrt{(5a)^2-(3a)^2}=4a$，$AE=EB+AB=2a+6a=8a$，

$\therefore \frac{CE}{AE}=\frac{4a}{8a}=\frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.

8. (1)【解】$\because$ BC 与 $\odot O$ 相切于点 C，$\therefore$ $OC \perp BC$，$\therefore$ $\angle OCB=90^\circ$.

$\because$ $\angle ACB=120^\circ$，$\therefore$ $\angle ACO=\angle ACB-\angle OCB=120^\circ-90^\circ=30^\circ$.

(2)【证明】$\because$ $OA=OC$，$\therefore$ $\angle OAC=\angle ACO=30^\circ$.

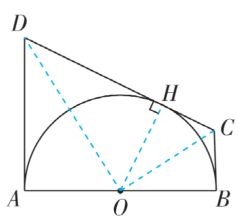
$\because$ $\angle ACB=120^\circ$，$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，$\therefore$ $\angle B=30^\circ$，

$\therefore$ $\angle A=\angle B$，$\therefore$ $AC=BC$.

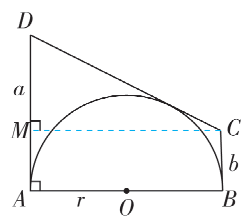
9. (1)【证明】如图(1)，连接 OC，OD，过点 O 作 $OH\perp CD$ 于点 H.

$\because$ AD，BC 均为该半圆的切线，$\therefore$ $AD\perp AB$，$BC\perp AB$，$\therefore$ $AD/\!/BC$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为梯形. 设 $AD=s$，$BC=t$，$OH=d$，$OA=OB=r$. 由于 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle BOC}$，则有 $\frac{1}{2}\times 2r(s+t)=\frac{1}{2}sr+\frac{1}{2}(s+t)d+\frac{1}{2}tr$，化简得 $d=r$，即 OH 是该半圆的半径，

$\therefore$ CD 与该半圆相切.



图(1)



图(2)

【解】(2) $m=n$.

理由如下：如图(2)，过点 C 作 $CM\perp AD$ 于点 M，易得 $CM=2r$，$AM=BC=b$.

在 Rt$\triangle CDM$ 中，由勾股定理可得 $CD^2=DM^2+CM^2$. $\because$ $CD=AD+BC=a+b$，$DM=|a-b|$，$CM=2r$，$\therefore$ $(a+b)^2=(a-b)^2+4r^2$，

$\therefore$ $r^2=ab=2$，代入 $m=\frac{2}{2+a}+\frac{2}{2+b}$ 可得 $m=\frac{ab}{ab+a}+\frac{ab}{ab+b}=\frac{b}{1+b}+\frac{a}{1+a}=n$.

(3) $\because$ CD，AD，BC 均为该半圆的切线，$\therefore$ $DA=DE$，$CB=CE$.

由(1)可得 $AD/\!/BC$，$\therefore$ 易得 $\triangle BCG\backsim\triangle DAG$，$\therefore$ $\frac{CG}{GA}=\frac{CB}{AD}=\frac{CE}{ED}$，

$\therefore$ $\frac{CG}{CA}=\frac{CE}{CD}$.

$\because$ $\angle ACD=\angle GCE$，$\therefore$ $\triangle ACD\backsim\triangle GCE$，$\therefore$ $\angle ADC=\angle GEC$，

$\therefore$ $EG/\!/AD/\!/BC$，$FG/\!/AD/\!/BC$，$\therefore$ 易得 $\triangle AFG\backsim\triangle ABC$，$\triangle BFG\backsim\triangle BAD$，$\therefore$ $\frac{FG}{BC}=\frac{AF}{AB}$，$\frac{FG}{AD}=\frac{BF}{AB}$，$\therefore$ $\frac{FG}{BC}+\frac{FG}{AD}=\frac{AF}{AB}+\frac{BF}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$，

$\therefore$ $\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{FG}$.

同理可得 $\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{EG}$，$\therefore$ $FG=EG=x$. 由(2)可知 $r^2=AD\cdot BC=DE\cdot EC=1$，$\therefore$ $\frac{1}{DE}+\frac{1}{CE}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{EG}=\frac{DE+CE}{DE\cdot CE}=DC=\frac{1}{x}$.

$\because$ AB 为直径，$\therefore$ $\angle AEB=90^\circ$. $\because$ $EF/\!/AD$，$\therefore$ $EF\perp AB$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\because$ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2r$，$\therefore$ $AE\cdot BE=4x$，$\therefore$ $\frac{4}{AE\cdot BE}=\frac{1}{x}$，$\therefore$ $y=\frac{4}{AE\cdot BE}+\frac{1}{FG}+CD=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$.

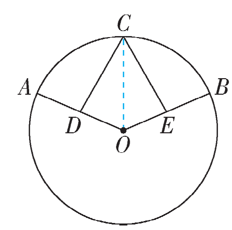
B 考点突破练

考点28　圆的基本性质

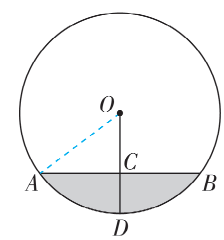
刷基础

1. B　【解析】$\because$ $\angle AOC=108^\circ$，$\therefore$ $\angle BOC=180^\circ-108^\circ=72^\circ$. $\because$ $CD=BD$，$\therefore$ $\angle BOD=\angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=36^\circ$，$\therefore$ $\angle AOD=\angle AOC+\angle COD=108^\circ+36^\circ=144^\circ$. 故选 B.

2.【证明】如图，连接 OC. 在 $\odot O$ 中，$\because$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOC$. $\because$ $OA=OB$，D，E 分别是半径 OA 和 OB 的中点，$\therefore$ $OD=OE$. $\because$ $OC=OC$，$\therefore$ $\triangle COD\cong\triangle COE$(SAS)，$\therefore$ $CD=CE$.



(第2题图)

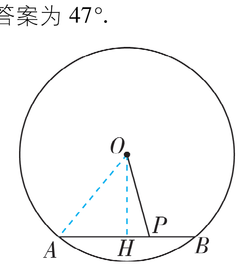


(第3题图)

3. A　【解析】连接 OA，如图所示. $\because$ $\odot O$ 的直径为 100 cm，$\therefore$ $OD=OA=50$ cm. 由题意得 $OD\perp AB$，$AB=80$ cm，$\therefore$ $AC=BC=\frac{1}{2}AB=40$ cm，$\therefore$ $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{50^2-40^2}=30$(cm)，$\therefore$ 积水的深度 $CD=OD-OC=50-30=20$(cm)，故选 A.

4. 47°　【解析】$\because$ 半径 OB 经过 AC 的中点 D，$\therefore$ $OB\perp AC$. $\because$ $OC=OA$，$\therefore$ $\angle AOB=\angle BOC$. $\because$ $\angle ACO=43^\circ$，$OB\perp AC$，$\therefore$ $\angle AOB=\angle BOC=90^\circ-43^\circ=47^\circ$，故答案为 47°.

5. 5　【解析】如图，过 O 作 $OH\perp AB$ 于 H，连接 OA，$\therefore$ $AH=\frac{1}{2}AB$. $\because$ $PA=4$，$PB=2$，$\therefore$ $AB=4+2=6$，$\therefore$ $AH=3$，$\therefore$ $PH=AP-AH=4-3=1$. $\because$ $OP=\sqrt{17}$，$\therefore$ $OH=\sqrt{OP^2-PH^2}=4$，$\therefore$ $OA=\sqrt{AH^2+OH^2}=5$，$\therefore$ $\odot O$ 的半径是 5.

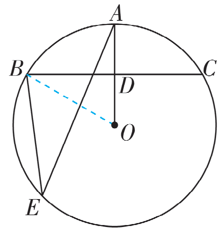


6. A　【解析】$\because$ $\angle AOB=42^\circ$，$\therefore$ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=21^\circ$. 故选 A.

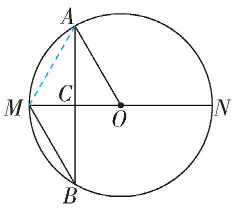
7. B 【解析】$\because\ \angle AOC=144°$，$\therefore\ \angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times 144°=72°$. 故选 B.

8. B 【解析】$\because\ \angle ACB=55°$，$\therefore\ \angle AOB=2\angle ACB=110°$. $\because\ OB=OA$，$\therefore\ \angle ABO=\angle BAO=\frac{1}{2}(180°-\angle AOB)=35°$，故选 B.

9. A 【解析】连接 BO，如图. $\because\ \odot O$ 的半径 OA 与弦 BC 互相垂直平分，$\therefore\ OD=AD=\frac{1}{2}OA$. $\because\ OB=OA$，$\therefore\ OD=\frac{1}{2}OB$. 在 Rt$\triangle BDO$ 中，$\cos\angle BOD=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{2}$，$\therefore\ \angle BOD=60°$，$\therefore\ \angle AEB=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$，故选 A.



10. D 【解析】如图，连接 AM. $\because\ OA/\!/BM$，$AB\perp MN$，MN 是直径，$\therefore\ \angle OAB=\angle ABM$，$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，$\therefore\ \angle MAB=\angle MBA=\angle OAC$，$\therefore\ \angle AMO=\angle AOM$，$\therefore\ AM=AO=MO$，$\therefore\ \triangle AMO$ 为等边三角形，$\therefore\ \angle AOM=60°$. 故选 D.

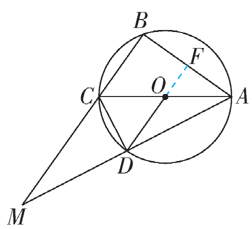


11. (1)【证明】$\because\ AB$ 是$\odot O$ 的直径，$\therefore\ \angle ADB=90°$，$\therefore\ \angle BAD+\angle ABD=90°$. $\because\ \angle E=\angle CBD=\angle BAD$，$\therefore\ \angle CBD+\angle ABD=90°$，$\therefore\ \angle ABC=90°$，$\therefore\ AB\perp BC$. $\because\ AB$ 是$\odot O$ 的直径，$\therefore\ CB$ 为$\odot O$ 的切线.

(2)【解】$\because\ \angle F=\angle ADE=\angle ABE$，$AF/\!/BE$，$\therefore\ \angle BAF=\angle ABE=\angle F$，$\therefore\ AB=BF=20$，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15$.

12. (1)【证明】如图，延长 DO 交 AB 于 F. $\because$ 点 D 为弦 AB 所对优弧的中点，$\therefore\ DF\perp AB$. $\because\ AC$ 是$\odot O$ 的直径，$\therefore\ \angle ABC=90°$，$\therefore\ MB/\!/DF$，$\therefore\ \angle M=\angle ODA$. $\because\ OA=OD$，$\therefore\ \angle OAD=\angle ODA$，$\therefore\ \angle M=\angle OAD$，$\therefore\ AC=CM$.



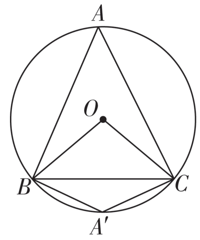
(2)【解】设$\odot O$ 的半径为 R，则 $AC=CM=2R$. $\because\ BC=3$，$\therefore\ MB=MC+BC=2R+3$. $\because\ MB/\!/DF$，$OA=OC$，$\therefore\ AD=DM=2\sqrt{5}$，$\therefore\ AM=4\sqrt{5}$. 在 Rt$\triangle ABM$ 中，$AB^2=AM^2-BM^2=(4\sqrt{5})^2-(2R+3)^2$，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB^2=AC^2-BC^2=(2R)^2-3^2$，$\therefore\ (4\sqrt{5})^2-(2R+3)^2=(2R)^2-3^2$，解得 $R_1=\frac{5}{2}$，$R_2=-4$（舍去），$\therefore\ AC=5$.

13. C 【解析】$\because\ \odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的外接圆，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接四边形，$\therefore\ \angle B+\angle D=180°$. $\because\ \angle B=105°$，$\therefore\ \angle D=180°-105°=75°$，故选 C.

14. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为$\odot O$ 的内接四边形，$\angle BCD=130°$，$\therefore\ \angle A+\angle BCD=180°$，$\therefore\ \angle A=50°$，$\therefore$ 由圆周角定理得，$\angle BOD=2\angle A=100°$，故选 C.

刷 易错

15. $50°$或 $130°$ 【解析】分为两种情况：如图，当 O 在$\triangle ABC$ 内部时，根据圆周角定理得 $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 100°=50°$；当 O 在$\triangle A'BC$ 外部时，$\because\ A,B,A',C$ 四点共圆，$\therefore\ \angle A+\angle A'=180°$，$\therefore\ \angle A'=180°-50°=130°$. 故答案为 $50°$或 $130°$.



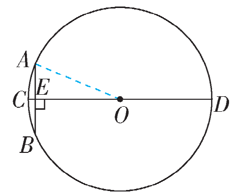
易错警示

关于圆心位置的分类讨论

对于没有给出图形的题目，要分析多种情况，例如本题要分圆心 O 在$\triangle ABC$ 内部和外部两种情况进行讨论.

刷 提升

1. D 【解析】如图，连接 OA. $\because\ AB\perp CD$，且 $AB=10$ 寸，$\therefore\ AE=BE=5$ 寸. 设$\odot O$ 的半径 OA 的长为 x 寸，则 $OC=OD=x$ 寸. $\because\ CE=1$ 寸，$\therefore\ OE=(x-1)$ 寸. 在直角三角形 AOE 中，根据勾股定理得 $OA^2-OE^2=AE^2$，即 $x^2-(x-1)^2=5^2$，解得 $x=13$，$\therefore\ CD=26$ 寸，故选 D.



2. D 【解析】$\because\ OA\perp OB$，$\therefore\ \angle O=90°$，$\therefore\ \angle C=\frac{1}{2}\angle O=45°$. $\because\ \angle B+\angle C=\angle O+\angle A$，$\therefore\ \angle B=\angle O+\angle A-\angle C=90°+20°-45°=65°$. 故选 D.

3. C 【解析】$\because\ BE/\!/AD$，$\therefore\ \angle ADC=\angle BEC=50°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，$\therefore\ \angle ABC=180°-\angle ADC=130°$. 故选 C.

4. C 【解析】$\because\ AB=AD$，$\therefore\ \angle AOD=\angle AOB=60°$. $\because\ OD=OC$，$\therefore\ \angle ODC=\angle OCD=\frac{1}{2}\angle AOD=30°$. $\because\ AC$ 是$\odot O$ 的直径，$\therefore\ \angle ADC=90°$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{CD}$，$\therefore\ CD=3$，故选 C.

刷 素养

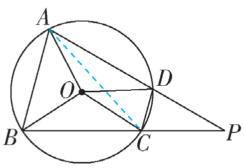
5.【解】(1) $\because\ \angle AOB=100°$，$\angle COD=40°$，$\therefore\ \angle AOC=100°-40°=60°$，$\therefore\ \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=30°$. 故答案为 $30°$.

(2)①$\angle AOB-\angle COD$ 是定值.

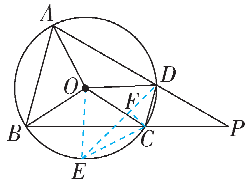
如图(1)，连接 AC.

$\because\ \angle AOB=2\angle ACB$，$\angle COD=2\angle CAD$，$\therefore\ \angle AOB-\angle COD=2(\angle ACB-\angle CAD)=2\angle P$. 又$\because\ \angle P=30°$，$\therefore\ \angle AOB-$

$\angle COD=60°$.



图(1)

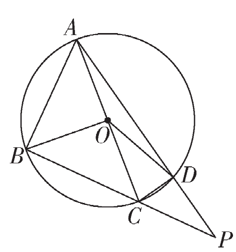


图(2)

②如图(2),取$\odot O$上一点E,连接OE,使得$\angle DOE=\angle AOB$,连接CE,DE.

$\because \angle DOE=\angle AOB$,$\angle AOB-\angle COD=60°$,$\therefore \angle DOE-\angle COD=60°$,$\therefore \angle COE=60°$. 又$\because OC=OE$,$\therefore \triangle OCE$为等边三角形,$\therefore CE=OC$. 作$CF\perp DE$于点$F$. $\because \angle COE=60°$,$\therefore \angle CDE=30°$. $\because CD=\sqrt{3}$,$DE=AB=4$,$\therefore CF=CD\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$DF=CD\cdot\cos 30°=\frac{3}{2}$,$\therefore EF=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$,$\therefore CE=OC=\sqrt{CF^2+EF^2}=\sqrt{7}$,$\therefore \odot O$的半径为$\sqrt{7}$.

(3)$\because CD=\sqrt{3}$为定值,$\therefore \angle COD$的度数是定值,$\therefore \angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD$的度数是定值. $\because \angle P=30°$,$\therefore \triangle ACP$在运动过程中形状不变,$\therefore$当AC为直径时,$S_{\triangle ACP}$最大,如图(3)所示,此时$\angle ABC=\angle ADC=90°$,$\therefore AP=2AB=8$,$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AP\cdot CD=4\sqrt{3}$,即$S_{\triangle ACP}$的最大值为$4\sqrt{3}$.



图(3)

考点29 与圆有关的位置关系

刷基础

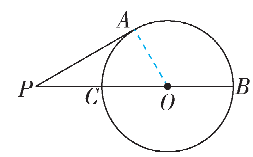
1. D 【解析】$\because$点A是$\odot O$外一点,$\therefore OA>6$,$\therefore OA$的长可能为8. 故选D.

2. D 【解析】$\because$在直角三角形ABC中,$\angle ACB=90°$,$\angle A=30°$,$AB=4$,$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=2$,$\therefore AC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. $\because CD$是AB边上的高,$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}BC\cdot AC$,$\therefore CD=\frac{AC\times BC}{AB}=\frac{2\times 2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$. $\because CD=\sqrt{3}<2$,$CB=2$,$CA=2\sqrt{3}>2$,$\therefore$点A在圆C外,点D在圆C内,点B在圆C上,故D选项正确. 故选D.

3. A 【解析】$\because PA$与$\odot O$相切于点A,$\therefore PA\perp OA$,$\therefore \angle OAP=90°$. $\because \angle P=40°$,$\therefore \angle AOP=90°-\angle P=90°-40°=50°$,$\therefore \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOP=\frac{1}{2}\times 50°=25°$,故选A.

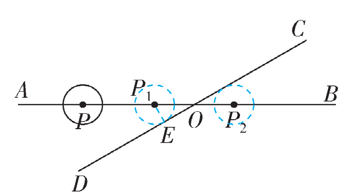
4. C 【解析】A选项,由尺规作图可知MN是线段OP的垂直平分线,故本选项说法成立,不符合题意. B选项,$\because OP$是$\odot C$的直径,$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90°$. $\because OA$,OB为$\odot O$的半径,$\therefore PA$,PB都是$\odot O$的切线,故本选项说法成立,不符合题意. C选项,AB与OC的大小不能确定,故本选项说法不一定成立,符合题意. D选项,$\because PA$,PB都是$\odot O$的切线,$\therefore \angle APO=\angle BPO$,故本选项说法成立,不符合题意. 故选C.

5. $3\sqrt{3}$ 【解析】如图,连接OA. $\because PA$是$\odot O$的切线,$\therefore OA\perp PA$,$\therefore \angle OAP=90°$. $\because \angle P=30°$,$PA=3$,$\therefore OP=\frac{PA}{\cos P}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$,$OA=PA\cdot\tan P=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$,$\therefore OB=OA=\sqrt{3}$,$\therefore PB=OP+OB=3\sqrt{3}$,故答案为$3\sqrt{3}$.



6. 4或8 【解析】如图,当$\odot P$移动到$\odot P_1$位置时,$\odot P_1$与直线CD相切于点E,连接P_1E,则$P_1E\perp CD$. $\because \angle AOD=30°$,$\therefore OP_1=2P_1E=2\times 1=2$(cm),$\therefore PP_1=6-2=4$(cm),$\therefore$移动时间为$4\div 1=4$(s).

当$\odot P$移动到$\odot P_2$位置时,$\odot P_2$与直线CD相切. 同理可得$OP_2=2$ cm,$\therefore PP_2=6+2=8$(cm),$\therefore$移动时间为$8\div 1=8$(s). 综上所述,4 s或8 s后$\odot P$与直线CD相切,故答案为4或8.



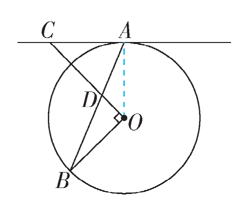
7. 【解】(1)直线AC与$\odot O$相切. 证明:

如图,连接OA.

$\because OC\perp OB$,$\therefore \angle B+\angle BDO=90°$.

$\because CA=CD$,$\therefore \angle CDA=\angle CAD$.

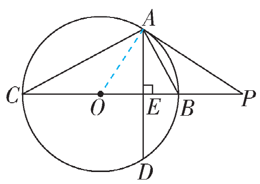
$\because \angle CDA=\angle BDO$,$\therefore \angle CAD=\angle BDO$. $\because OA=OB$,$\therefore \angle B=\angle OAB$,$\therefore \angle OAB+\angle CAD=90°$,即$\angle CAO=90°$. $\because OA$为半径,$\therefore AC$与$\odot O$相切.



(2)由(1)知$\angle CAD=\angle BDO$,$\therefore \cos\angle CAD=\cos\angle BDO=\frac{5}{13}$,$\therefore \frac{OD}{BD}=\frac{5}{13}$,$\therefore$设$OD=5k$,$BD=13k$. 在$Rt\triangle OBD$中,$OB^2+OD^2=BD^2$,$\therefore 12^2+(5k)^2=(13k)^2$,解得$k_1=1$,$k_2=-1$(舍去),$\therefore OD=5$. 设$CA=x$,则$CD=x$,$\therefore CO=5+x$. 在$Rt\triangle AOC$中,由勾股定理得$AC^2+OA^2=OC^2$,即$x^2+12^2=(x+5)^2$,解得

$x=11.9$，$\therefore CA=11.9$.

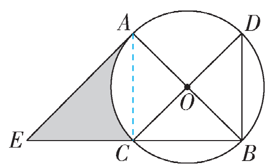
8. (1)【证明】如图，连接 OA，则 $\angle AOB=2\angle C$. $\because BC$ 为 $\odot O$ 的直径，$AD\perp BC$，$\therefore \overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{AB}$，$\angle AEC=90°$，$\therefore \angle DAB=\angle C$. $\because AB$ 平分 $\angle PAD$，$\therefore \angle PAD=2\angle DAB=2\angle C$，$\therefore \angle PAD=\angle AOB$，$\therefore \angle OAP=\angle PAD+\angle OAD=\angle AOB+\angle OAD=180°-\angle AEC=90°$，$\therefore OA\perp AP$. $\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径，$\therefore PA$ 是 $\odot O$ 的切线.



(2)【解】$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle BAC=90°$. $\because \angle PAB=\angle DAB=\angle C$，$\therefore \dfrac{AB}{CA}=\tan C=\tan\angle PAB=\dfrac{1}{2}$. $\because \angle PAB=\angle C$，$\angle P=\angle P$，$\therefore \triangle PAB\backsim\triangle PCA$，

$\therefore \dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{AB}{CA}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore PC=2PA$，$PA=2PB$，$\therefore PC=4PB$. $\because \odot O$ 的半径为 5，$\therefore BC=2\times5=10$，$\therefore PB+10=4PB$，$\therefore PB=\dfrac{10}{3}$，$\therefore PA=2\times\dfrac{10}{3}=\dfrac{20}{3}$，$\therefore PA$ 的长为$\dfrac{20}{3}$，PB 的长为$\dfrac{10}{3}$.

9. (1)【证明】$\because \angle BDC=45°$，$\therefore \angle COB=2\angle D=90°$. $\because OC=OB$，$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45°$. 如图，连接 AC. $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore AC\perp BE$. $\because CE=BC$，$\therefore AC$ 垂直平分 BE，$\therefore AE=AB$，$\therefore \angle E=\angle ABE=45°$，$\therefore \angle EAB=90°$，$\therefore AE\perp AB$. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore AE$ 所在的直线与 $\odot O$ 相切.



(2)【解】$\because AB=4$，$\therefore AO=OC=2$. $\because \angle BOC=90°$，$\therefore \angle AOC=90°$，$\therefore \angle EAB+\angle AOC=180°$，$\therefore AE/\!/OC$. $\because AE=AB=4$，$\therefore$ 阴影部分的面积 = 四边形 $AOCE$ 的面积 − 扇形 AOC 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times(AE+OC)\cdot OA-\dfrac{90\pi\times2^2}{360}=\dfrac{1}{2}\times(4+2)\times2-\pi=6-\pi$.

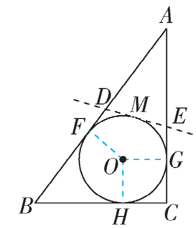
刷有所得

圆的切线的证明技巧

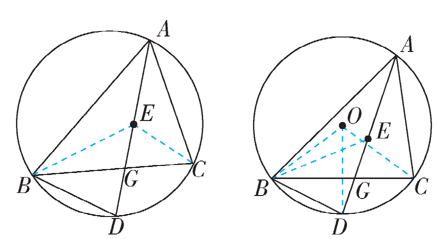
圆的切线的证明，首先看直线是否经过圆上一点，如果经过圆上一点，只需要连接半径，证明半径和直线垂直即可；如果没有经过圆上一点的条件，那么先过圆心向直线作垂线段，再证明这条垂线段等于圆的半径. 即已知切点，连半径，证垂直；切点未知，作垂线，证相等.

10. B 【解析】$\because$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$\therefore \angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC=70°$，$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-70°=110°$. $\because$ 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore BI$ 平分 $\angle ABC$，CI 平分 $\angle ACB$，$\therefore \angle IBC+\angle ICB=\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=55°$，$\therefore \angle BIC=180°-55°=125°$，故选 B.

11. B 【解析】如图，设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切 AB，BC，AC 于点 F，H，G，连接 OF，OH，OG，设 $\odot O$ 与 DE 相切于点 M，则 $AF=AG$，$BF=BH$，$CH=CG$，$MD=DF$，$EM=EG$，$OH\perp BC$，$OG\perp AC$. $\because BC=3$，$AC=4$，$AB=5$，$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，$\therefore \angle ACB=90°$，则四边形 $OHCG$ 是正方形，$\therefore \odot O$ 的半径为 $\dfrac{1}{2}(CH+CG)=\dfrac{1}{2}(AC+BC-AB)=1$，$\therefore CG=1$，$\therefore AG=AC-CG=4-1=3$，$\therefore AF=AG=3$，$\therefore \triangle ADE$ 的周长为 $AD+DE+AE=AD+DF+EG+AE=AF+AG=3+3=6$. 故选 B.

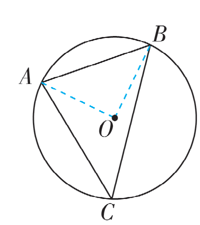


12. D 【解析】$\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，故①正确. 如图(1)，连接 BE，CE. $\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore \angle EBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ECB=\dfrac{1}{2}\angle ACB$. $\because \angle BAC=60°$，$\therefore \angle ABC+\angle ACB=120°$，$\therefore \angle BEC=180°-\angle EBC-\angle ECB=180°-\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=120°$，故②正确. 如图(2)，设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O，连接 OD，OB，OC，BE. $\because \angle BAD=\angle CAD$，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore OD\perp BC$. $\because$ 点 G 为 BC 的中点，$\therefore$ 点 G 为 OD 与 BC 的交点，$\therefore \angle BGD=90°$，故③正确. $\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore \angle ABE=\angle CBE$. $\because \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle DBC=\angle DAC=\angle BAD$，$\therefore \angle DBC+\angle EBC=\angle EBA+\angle EAB$，$\therefore \angle DBE=\angle DEB$，$\therefore DB=DE$，故④正确. 综上所述，正确结论的个数是 4. 故选 D.



图(1)　　图(2)

13. 5 【解析】如图，连接 OA，OB. $\because \angle ACB=45°$，$\therefore \angle AOB=2\angle ACB=90°$. $\because OA=OB$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA=45°$. 在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AB=5\sqrt{2}$，$\therefore OA=AB\cdot\cos45°=5\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$，$\therefore \odot O$ 的半径为 5，故答案为 5.



14. 2，5 【解析】$\because 6^2+8^2=10^2$，$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，$\therefore$ 易得 Rt$\triangle ABC$ 的内切圆的半径为$\dfrac{6+8-10}{2}=2$，Rt$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为$\dfrac{10}{2}=5$. 故答案为 2，5.

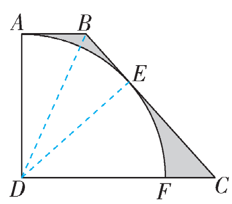
刷 易错

15. 9.2 或 9.6 或 48 或 50　【解析】当两圆相外切时，$1+2t+1=48-3t$ 或 $1+2t+1=3t-48$，解得 $t=9.2$ 或 $t=50$；当两圆相内切时，$1+2t-1=48-3t$ 或 $1+2t-1=3t-48$，解得 $t=9.6$ 或 $t=48$. 故答案为 9.2 或 9.6 或 48 或 50.

> **易错警示**
>
> 圆与圆的位置关系的分类讨论
>
> 当两圆相切时要考虑两圆相内切或相外切两种情况.

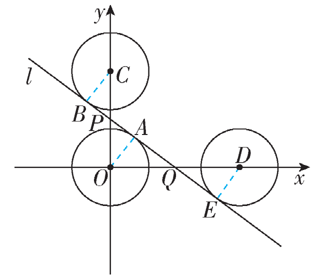
刷 提升

1. C　【解析】如图，连接 DB，DE.

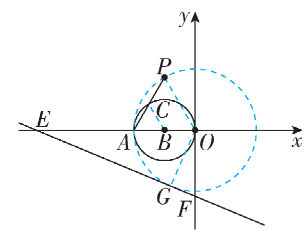


$\because AD\perp AB$，$AB\,/\!/\,CD$，$\therefore AD\perp CD$. $\because AD\perp AB$，AD 是扇形 ADF 的半径，$\therefore AB$ 是扇形 ADF 的切线. $\because BC$ 是扇形 ADF 的切线，切点为 E，$\therefore AB=BE=1$，$\angle ABD=\angle EBD$，$DE\perp BC$，$\therefore EC=BC-BE=3-1=2$. $\because AB/\!/CD$，$\therefore \angle ABD=\angle BDC$，$\therefore \angle EBD=\angle BDC$，$\therefore DC=BC=3$. 在 Rt$\triangle DEC$ 中，$DE=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，$\therefore AD=DE=\sqrt{5}$，$\therefore$ 阴影部分的面积为 $S_{梯形ABCD}-S_{扇形ADF}=\frac{1}{2}(1+3)\cdot\sqrt{5}-\frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{5})^2=2\sqrt{5}-\frac{5}{4}\pi$. 故选 C.

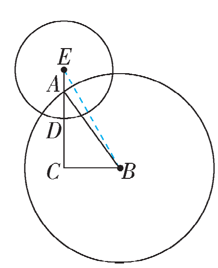
2. $(0,0)$ 或 $(0,6)$ 或 $(8,0)$　【解析】过点 O 作 $OA\perp PQ$ 于点 A，如图. $\because P(0,3)$，$Q(4,0)$，$\therefore OP=3$，$OQ=4$，$\therefore PQ=\sqrt{OP^2+OQ^2}=5$. $\because S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}OP\cdot OQ=\frac{1}{2}PQ\cdot OA$，$\therefore OA=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$. $\because \odot M$ 的半径为 $\frac{12}{5}$，圆心 M 在坐标轴上，$\therefore$ 圆心 M 与点 O 重合时，$\odot M$ 与直线 l 相切，此时 $M(0,0)$. 在 y 轴上找一点 C，过点 C 作 $CB\perp PQ$，使 $CB=\frac{12}{5}$，则圆心 M 与点 C 重合时，$\odot M$ 与直线 l 相切. $\because BC=OA=\frac{12}{5}$，$\angle CBP=\angle OAP=90°$，$\angle BPC=\angle APO$，$\therefore \triangle BPC\cong\triangle APO$，$\therefore PC=OP=3$，$\therefore C(0,6)$，$\therefore M(0,6)$. 在 x 轴上找一点 D，过点 D 作 $DE\perp PQ$，使 $DE=\frac{12}{5}$，则圆心 M 与点 D 重合时，$\odot M$ 与直线 l 相切. $\because DE=OA=\frac{12}{5}$，$\angle DEQ=\angle OAQ=90°$，$\angle DQE=\angle OQA$，$\therefore \triangle DQE\cong\triangle OQA$，$\therefore DQ=OQ=4$，$\therefore D(8,0)$，$\therefore M(8,0)$. 综上，$\odot M$ 与直线 l 相切时，点 M 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(0,6)$ 或 $(8,0)$. 故答案为 $(0,0)$ 或 $(0,6)$ 或 $(8,0)$.



3. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　【解析】如图，连接 BC，OP，设直线 $y=-\frac{1}{3}x-1$ 交 x 轴于点 E，交 y 轴于点 F. 易得点 E，F 的坐标分别为 $(-3,0)$，$(0,-1)$. $\because A(a,0)$，$\therefore OA=-a$. $\because AC=CP$，$AB=OB$，$\therefore OP=2BC=-a$，$\therefore$ 点 P 的运动轨迹是以 O 为圆心，$-a$ 为半径的圆. 当 $\odot O$ 与直线 $y=-\frac{1}{3}x-1$ 相切时，点 P 组成的图形与直线 $y=-\frac{1}{3}x-1$ 有且只有一个公共点. 设切点为 G，连接 OG，则 $OG\perp EF$. 在 Rt$\triangle EOF$ 中，$EF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$S_{\triangle EOF}=\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OF=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot OG$，$\therefore OG=\frac{3\times1}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\therefore a=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故答案为 $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



4. $\sqrt{10}<r\leqslant2\sqrt{10}$　【解析】由题意画出图形如图(1)，连接 BE.



图(1)

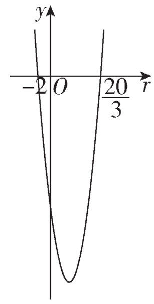
$\because \odot B$ 过点 A，且 $AB=7$，$\therefore \odot B$ 的半径为 7. $\because \odot E$ 过点 D，$\odot E$ 的半径为 r，且 $CD=DE$，$\therefore CE=CD+DE=2r$. $\because AB=7$，$BC=3$，$\angle C=90°$，$\therefore BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{9+4r^2}$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{49-9}=2\sqrt{10}$. $\because$ 点 D 在边 AC 上，点 E 在 CA 延长线上，$\therefore \begin{cases}CD\leqslant AC,\\CE>AC,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}r\leqslant2\sqrt{10},\\2r>2\sqrt{10},\end{cases}$ $\therefore \sqrt{10}<r\leqslant2\sqrt{10}$.

$\because \odot B$ 与 $\odot E$ 有公共点，$\therefore AB-DE\leqslant BE\leqslant AB+DE$，即 $\begin{cases}\sqrt{9+4r^2}\leqslant7+r,①\\7-r\leqslant\sqrt{9+4r^2}.②\end{cases}$ 不等式①可化为 $3r^2-14r-40\leqslant0$. 解方程 $3r^2-14r-40=0$，得 $r=-2$ 或 $r=\frac{20}{3}$. 画出函数 $y=3r^2-14r-40$

的大致图象如图(2)，

由函数图象可知，当 $y\leqslant 0$ 时，$-2\leqslant r\leqslant\frac{20}{3}$，即不等式①的解集为 $-2\leqslant r\leqslant\frac{20}{3}$. 同理可得不等式②的解集为 $r\geqslant 2$ 或 $r\leqslant-\frac{20}{3}$. 则不等式组的解集为 $2\leqslant r\leqslant\frac{20}{3}$. 又∵ $\sqrt{10}<r\leqslant 2\sqrt{10}$，

∴ 半径 r 的取值范围是 $\sqrt{10}<r\leqslant 2\sqrt{10}$，故答案为 $\sqrt{10}<r\leqslant 2\sqrt{10}$.



图(2)

5.【解】(1) AF 与⊙O 相切. 理由如下：

∵ ⊙O 是 Rt△ABC 的外接圆，$\angle C=90°$，∴ AB 是直径，

∴ $\angle ADB=90°$，

∴ $\angle BAD+\angle ABD=90°$. ∵ $\angle DAF=\angle ABD$，∴ $\angle BAD+\angle DAF=90°$，∴ $\angle BAF=90°$，即 $AB\perp AF$. ∵ AB 是直径，∴ AF 与⊙O 相切.

(2) 在 Rt△ABF 中，$BF=\sqrt{AF^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

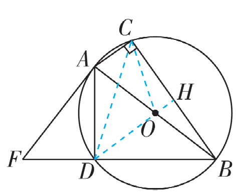
∵ $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AD\cdot BF=\frac{1}{2}AF\cdot AB$，

∴ $AD=\frac{AF\cdot AB}{BF}=\frac{12}{5}$，

∴ $DB=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$，

∴ $DF=BF-DB=5-\frac{16}{5}=\frac{9}{5}$.

如图，连接 CD，OC，作 $DH\perp BC$ 于点 H，则 $\angle BHD=\angle ADF=90°$.



∵ $\angle AFB=\angle CBD$，∴ △AFD∽△DBH，

∴ $\frac{FD}{BH}=\frac{AF}{BD}$，∴ $\frac{\frac{9}{5}}{BH}=\frac{3}{\frac{16}{5}}$，解得 $BH=\frac{48}{25}$.

∵ $\angle AFB+\angle DAF=\angle DAB+\angle DAF=90°$，

∴ $\angle AFB=\angle DAB$. ∵ $\angle DAB=\angle BCD$，

∴ $\angle AFB=\angle BCD$. ∵ $\angle AFB=\angle CBD$，

∴ $\angle BCD=\angle CBD$，∴ $DC=DB$，∴ DH 垂直平分 BC.

∵ $OC=OB$，∴ O 在 BC 的垂直平分线上，

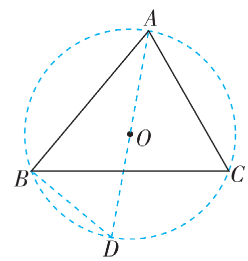
∴ D，H，O 三点共线，∴ $BC=2BH=2\times\frac{48}{25}=\frac{96}{25}$，∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{96}{25}\right)^2}=\frac{28}{25}$，即 AC 的长为 $\frac{28}{25}$.

刷素养

6. (1)【证明】如图，作△ABC 的外接圆⊙O，作⊙O 的直径 AD，连接 BD，则 $AD=2R$. ∵ AD 是直径，∴ $\angle ABD=90°$. ∵ $\angle D=\angle C$，$AB=c$，∴ $\frac{AB}{AD}=\sin D=\sin C$，∴ $\frac{c}{\sin C}=2R$.

同理可得 $\frac{a}{\sin\angle BAC}=2R$，$\frac{b}{\sin\angle ABC}=2R$，

∴ $\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{\sin\angle ABC}=\frac{c}{\sin C}=2R$.



(2)【解】∵ △ABC 是等边三角形，

∴ $AB=CA$，$\angle BAE=\angle C=60°$.

在△ABE 和△CAD 中，$\begin{cases}AB=CA,\\ \angle BAE=\angle C,\\ AE=CD,\end{cases}$

∴ △ABE≌△CAD(SAS)，

∴ $BE=AD$，$\angle ABE=\angle CAD$，∴ $\angle BGD=\angle BAD+\angle ABE=\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC=60°$. ∵ $BF\perp AD$ 于点 F，$GF=x$，$GE=y$，

∴ $\angle BFG=90°$，∴ $\angle FBG=90°-\angle BGD=30°$，∴ $BG=2GF=2x$，∴ $AD=BE=BG+GE=2x+y$.

设△ACD 的外接圆的半径为 r，则 $\frac{AD}{\sin C}=2r$，

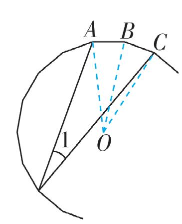
∴ $\frac{2x+y}{\sin 60°}=2r$，∴ $\frac{2x+y}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2r$，∴ $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y$，

∴ △ACD 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y$.

考点 30　与圆有关的计算

刷基础

1. B　【解析】如图，设正 n 边形的外心为 O，连接 OA，OB，OC. 由圆周角定理得 $\angle AOC=2\angle 1=40°$. ∵ $AB=BC$，∴ 易得 $\angle AOB=\angle BOC=20°$，则 $n=\frac{360°}{20°}=18$，故选 B.



2. 8　【解析】∵ $\angle ACB=22.5°$，∴ $\angle AOB=2\angle ACB=45°$，则 $n=360°\div45°=8$，故答案为 8.

第一部分　考点过关
第二部分　题型突破
第三部分　中考新趋势
狂K重点

3. C　【解析】设此扇形的圆心角是 n 度. 根据题意得 $\frac{n\pi\times 1}{180}=\pi$，解得 $n=180$，所以此扇形的圆心角的大小为 180 度. 故选 C.

4. B　【解析】根据扇形的面积公式，得 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\times 6\pi\times 9=27\pi$. 故选 B.

5. $\frac{5\pi}{4}$　【解析】∵ 每个小方格都是边长为 1 的正方形，∴ $OA=OB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 连接 AB. 根据勾股定理得 $AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，∴ $OA^2+OB^2=AB^2$，∴ $\angle AOB=90°$，∴ $S_{扇形OAB}=\frac{90\pi\times(\sqrt{5})^2}{360}=\frac{90\pi\times 5}{360}=\frac{5\pi}{4}$. 故答案为 $\frac{5\pi}{4}$.

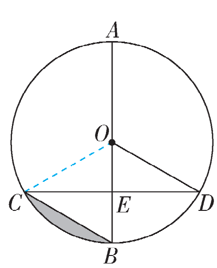
6. 10π　【解析】∵ ⊙O 的半径为 15 厘米，点 M 转动的度数为 $120°$，∴ 点 M 移动的路程为 $\frac{120\pi\times 15}{180}=10\pi$（厘米），即传送带上的物体向右移动的距离为 10π 厘米. 故答案为 10π.

7. B　【解析】设这个圆锥的侧面展开图的圆心角为 $n°$. 根据题意得 $10\pi=\frac{n\cdot\pi\cdot 9}{180}$，解得 $n=200$，∴ 这个圆锥的侧面展开图的圆心角度数为 $200°$. 故选 B.

8. 1 570　【解析】∵ 斗笠底部边沿的周长为 40π cm，∴ 斗笠底部边沿的半径为 $40\pi\div 2\pi=20$（cm），∴ 圆锥的母线长为 $\sqrt{15^2+20^2}=25$（cm），∴ 这个斗笠的侧面积是 $\frac{1}{2}\times 40\pi\times 25=500\pi(\text{cm}^2)\approx 1\,570(\text{cm}^2)$. 故答案为 1 570.

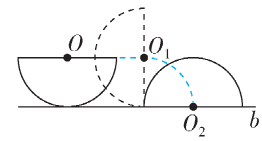
9. $\frac{9\pi}{8}$　【解析】∵ $AB=3$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 45°得到 $\triangle AB'C'$，∴ $\triangle AB'C'\cong\triangle ABC$，$\angle B'AB=45°$，$AB'=AB=3$，∴ $S_{\triangle AB'C'}=S_{\triangle ABC}$，∴ 题图中阴影部分的面积等于 $S_{扇形AB'B}=\frac{45\pi\times 3^2}{360}=\frac{9\pi}{8}$，故答案为 $\frac{9\pi}{8}$.

10. $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$　【解析】如图，连接 OC，设 ⊙O 的半径为 r. ∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle DEO=90°$. ∵ $\angle ODE=30°$，$OE=OB-BE=r-1$，∴ $\sin\angle ODE=\frac{OE}{OD}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{r-1}{r}$，解得 $r=2$. 又∵ $OC=OD$，∴ $\angle BOC=\angle BOD=90°-\angle ODE=60°$，∴ $S_{扇形BOC}=\frac{60}{360}\pi r^2=\frac{2\pi}{3}$. ∵ $OB=2$，$CE=DE=OD\cdot\cos\angle ODE=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot CE=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，∴ $S_{阴影}=S_{扇形BOC}-S_{\triangle BOC}=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$. 故答案为 $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.



刷 易错

11. 5π　【解析】如图，圆心 O 先沿直线 OO_1 从 O 运动到 O_1，长度为圆的周长的 $\frac{1}{4}$，然后沿着弧 O_1O_2 旋转到 O_2，长度为圆的周长的 $\frac{1}{4}$，则圆心 O 运动路径的长度为 $\frac{1}{4}\times 2\pi\times 5+\frac{1}{4}\times 2\pi\times 5=5\pi$，故答案为 5π.



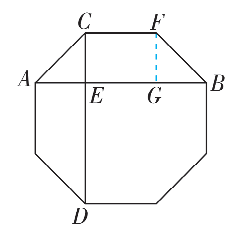
易错警示

圆心运动的轨迹

O 点到 O_1 的运动轨迹是一条线段而非圆弧，而 O_1 到 O_2 的运动轨迹是一段圆弧.

刷 提升

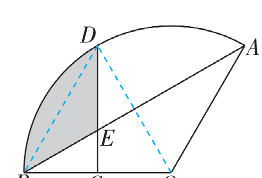
1. C　【解析】如图，过点 F 作 $FG\perp AB$ 于 G. 由题意可知，四边形 $CEGF$ 是矩形，$\triangle ACE$，$\triangle BFG$ 是等腰直角三角形，$AC=CF=FB=EG=4$. 在 Rt$\triangle ACE$ 中，$AE=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=2\sqrt{2}$. 同理可得 $BG=2\sqrt{2}$，∴ $AB=AE+EG+BG=2\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}=(4\sqrt{2}+4)$ cm，故选 C.



2. $(25\pi+100)$ m　【解析】由题知，$\overset{\frown}{PQ}$ 的长为 $\frac{90\cdot\pi\cdot 50}{180}=25\pi$（m），所以收割机械绕该待收割区域外围一周，所行驶的总长度为 $25\pi+50\times 2=(25\pi+100)$ m. 故答案为 $(25\pi+100)$ m.

3. 6π　【解析】第一步的“黄金螺旋线”的总长度是 $\frac{1}{4}\times 2\pi\times 1=\frac{\pi}{2}$（cm），第二步的“黄金螺旋线”的总长度是 $2\times\frac{\pi}{2}=\pi$（cm），第三步的“黄金螺旋线”的总长度是 $\pi+\frac{1}{4}\times 2\pi\times 2=2\pi$（cm），第四步的“黄金螺旋线”的总长度是 $2\pi+\frac{1}{4}\times 2\pi\times 3=\frac{7}{2}\pi$（cm），第五步的“黄金螺旋线”的总长度是 $\frac{7}{2}\pi+\frac{1}{4}\times 2\pi\times 5=6\pi$（cm），故答案为 6π.

4. $\frac{3\pi-3\sqrt{3}}{2}$　【解析】连接 OD，BD，如图. ∵ 点 D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，∴ $\angle DOB=\frac{1}{2}\angle AOB=60°$，



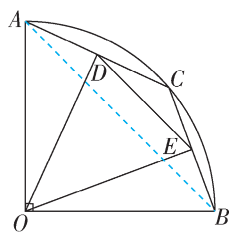
$\therefore S_{扇形DOB}=\frac{60\times\pi\times 3^2}{360}=\frac{3\pi}{2}$. ∵ $OD=OB$, ∴ $\triangle DOB$ 是等边三角形.

∵ C 是 OB 的中点, ∴ $DC\perp OB$, $OC=BC=\frac{1}{2}OB=\frac{3}{2}$, ∴ $DC=\sqrt{OD^2-OC^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $S_{\triangle DOC}=\frac{1}{2}OC\cdot DC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$. ∵ $\angle AOB=120°$, $OA=OB$, ∴ $\angle OBA=30°$, ∴ $EC=BC\cdot\tan 30°=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ∴ $S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}BC\cdot EC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, ∴ $S_{阴影}=S_{扇形DOB}-S_{\triangle DOC}-S_{\triangle EBC}=\frac{3\pi}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\pi-3\sqrt{3}}{2}$.

故答案为$\frac{3\pi-3\sqrt{3}}{2}$.

刷 素养

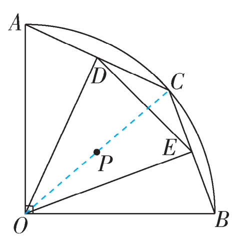
5.【解】(1)连接 AB,如图(1). ∵ $OA=OB=R$, $\angle AOB=90°$, ∴ $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形, ∴ $AB=\sqrt{2}OA=\sqrt{2}R$. ∵ 点 D 是弦 AC 的中点,点 E 是弦 BC 的中点, ∴ DE 是 $\triangle ACB$ 的中位线, ∴ $DE=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}R}{2}$.



图(1)

(2) ∵ $\angle AOB=90°$, $OA=R$, ∴ $l_1=\frac{90\pi\cdot R}{180}=\frac{\pi R}{2}$.

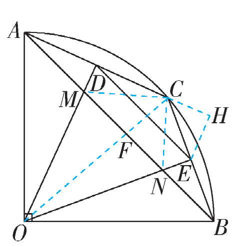
连接 OC,如图(2).



图(2)

∵ 点 D 是弦 AC 的中点,点 E 是弦 BC 的中点, ∴ $OE\perp BC$, $OD\perp AC$, ∴ $\angle OEC=\angle ODC=90°$, ∴ O,E,C,D 四点在以 OC 为直径的圆上,该圆为 $\triangle ODE$ 的外接圆, ∴ $\triangle ODE$ 的外心 P 为 OC 的中点, ∴ $OP=\frac{1}{2}OC=\frac{R}{2}$. ∵ $\angle AOB=90°$, C 为弧 AB 上的一个动点, ∴ $\triangle ODE$ 的外心 P 的运动轨迹为以 O 为圆心, $\frac{R}{2}$为半径的$\frac{1}{4}$圆周, ∴ $\triangle ODE$ 的外心 P 所经过的路径的长度 $l_2=\frac{1}{4}\times 2\pi\times\frac{R}{2}=\frac{1}{4}\pi R$, ∴ $l_2:l_1$ 的值为$\frac{\pi R}{4}:\frac{\pi R}{2}=\frac{1}{2}$.

(3)①∵ $AC=a$, $BC=b$, ∴ $DC=\frac{1}{2}a$, $EC=\frac{1}{2}b$. ∵ $\angle AOB=90°$, ∴ 劣弧 AB 所对的圆周角为 $45°$, ∴ $\angle DCE=180°-45°=135°$. 过 E 作 $EH\perp AC$,交 AC 的延长线于 H,如图(3),



图(3)

∴ $\angle ECH=45°$, ∴ $EH=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}CE=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}b=\frac{\sqrt{2}}{4}b$, ∴ $DH=DC+CH=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{4}b$. 由(1)知 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}R$. 在 Rt$\triangle DEH$ 中, $DE^2=EH^2+DH^2$, ∴ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}b\right)^2+\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{4}b\right)^2$, ∴ $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=2R^2$.

②如图(3),连接 OC, CM, CN. 由等腰三角形的性质可知, OD, OE 分别为 AC, CB 的垂直平分线, ∴ $AM=CM$, $BN=CN$, ∴ $\angle MAC=\angle MCA$, $\angle NCB=\angle NBC$. 由①可知 $\angle DCE=135°$, ∴ $\angle CAB+\angle CBA=45°$, ∴ $\angle MCO+\angle NCO=\angle MAC+\angle MCA+\angle NCB+\angle NBC=90°$, ∴ $\angle MCN=90°$, ∴ Rt$\triangle CMN$ 的外接圆半径为 $r=\frac{1}{2}MN$. 易证 $\triangle AOD\cong\triangle COD$, $\triangle BOE\cong\triangle COE$, ∴ $S_{四边形DOEC}=\frac{1}{2}S_{四边形AOBC}$. ∵ $S_{四边形AOBC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle AOB}=\frac{R^2}{2}$, ∴ 当 $S_{\triangle ABC}$ 取最大值时, $S_{四边形AOBC}$ 最大,此时 $S_{四边形DOEC}$ 有最大值. 设 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高为 h, ∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{2}Rh$, ∴ 当 h 取最大值时, $S_{四边形ODCE}$ 最大,此时 C 为弧 AB 中点, ∴ $OC\perp AB$, $AC=BC$,即 $a=b$. 设 OC 与 AB 交于点 F,则 $AF=FB=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, ∴ $OF=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, ∴ $FC=\frac{2-\sqrt{2}}{2}R$. 由①得 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=2R^2$. 又∵ $a=b$, ∴ $2a^2+\sqrt{2}a^2=2R^2$, ∴ $BC^2=a^2=b^2=(2-\sqrt{2})R^2$. ∵ $BE=\frac{1}{2}BC$, ∴ $BE^2=\frac{1}{4}BC^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2$. ∵ $\angle NEB=\angle BFC=90°$, $\angle NBE=\angle CBF$, ∴ $\triangle BEN\backsim\triangle BFC$, ∴ $\frac{BE}{BF}=\frac{BN}{BC}$, ∴ $BE\cdot BC=BN\cdot BF$, ∴ $2BE^2=BN\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R$, ∴ $2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2\right)=BN\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R$, ∴ $BN=(\sqrt{2}-1)R$, ∴ $FN=\frac{2-\sqrt{2}}{2}R$, ∴ 易得 $MN=(2-\sqrt{2})R$. ∵ $MN=2r$, ∴ $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}R$. 又∵ $a^2=b^2=(2-\sqrt{2})R^2$, ∴ $\frac{r}{a^2+b^2}=\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}R}{2(2-\sqrt{2})R^2}=\frac{1}{4R}$.

专题 11 与圆有关的证明与计算

刷 难关

1. A 【解析】设 $CD\perp AB$ 于 E, ∴ $AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$, ∴ 在 Rt$\triangle OBE$ 中, $OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$, ∴ $CE=OE+OC=3+5=8$, ∴ 在 Rt$\triangle ACE$ 中, $AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$. 故选 A.

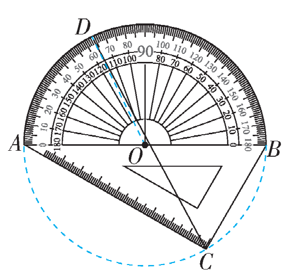
2. 13　【解析】∵ D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，∴ $OD\perp AB$，$AC=BC=\dfrac{1}{2}AB=12$ cm. 设半径 $OA=r$ cm，则 $OC=(r-8)$ cm. 在 Rt△AOC 中，由勾股定理得，$OC^2+AC^2=OA^2$，即 $(r-8)^2+12^2=r^2$，解得 $r=13$，故答案为 13.

3. (1)【证明】∵ AB 是⊙O 的直径，∴ $\angle ACB=90°$. ∵ $OD/\!/BC$，∴ $\angle OFA=\angle ACB=90°$，∴ $OF\perp AC$，∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，即点 D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点.

(2)【解】∵ $AB=10$，∴ $OD=5$. ∵ $OF\perp AC$，∴ $AF=CF$. ∵ $OA=OB$，∴ OF 为△ACB 的中位线，∴ $OF=\dfrac{1}{2}BC=3$，∴ $DF=OD-OF=5-3=2$.

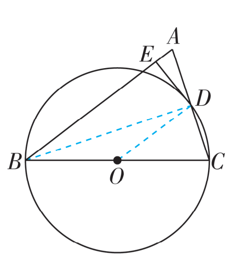
4. B　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，∴ $\angle A+\angle C=180°$. ∵ 四边形 $OBCD$ 是菱形，∴ $\angle BOD=\angle C$. 由圆周角定理得，$\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOD$，∴ $\angle BOD+\dfrac{1}{2}\angle BOD=180°$，∴ $\angle BOD=120°$，∴ $\angle A=60°$，故选 B.

5. A　【解析】∵ 直角三角板 ABC 的斜边 AB 与量角器的直径重合，且 $\angle ACB=90°$，∴ 点 A，B，C，D 在同一个圆上，如图所示，设圆心为点 O，连接 OD.

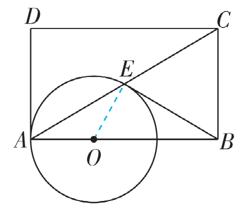


∵ $\angle AOD=64°$，∴ $\angle ACD=\dfrac{1}{2}\angle AOD=32°$，∴ $\angle BCD=\angle ACB-\angle ACD=90°-32°=58°$. 故选 A.

6. C　【解析】如图，连接 BD，OD，则 $OD=OB$，∴ $\angle ODB=\angle CBD$. ∵ BC 是⊙O 的直径，∴ $\angle BDC=90°$. ∵ D 为 AC 的中点，∴ BD 垂直平分 AC，∴ $BA=BC$，$\angle ADB=90°$，∴ $\angle ABD=\angle CBD$，∴ $\angle ABD=\angle ODB$，∴ $AB/\!/OD$. ∵ DE 是⊙O 的切线，∴ $DE\perp OD$，∴ $\angle AED=\angle ODE=90°$，∴ $\angle DEB=90°$. ∵ $\angle A=\angle BDE=90°-\angle ABD$，$BE=3DE$，∴ $\tan A=\tan\angle BDE=\dfrac{BE}{DE}=3$，故选 C.



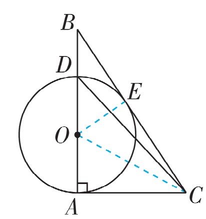
7. (1)【证明】连接 OE，如图.



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle ABC=90°$. ∵ $OA=OE$，$BE=BC$，∴ $\angle EAO=\angle AEO$，$\angle CEB=\angle ACB$，∴ $\angle AEO+\angle CEB=\angle ACB+\angle CAB=180°-\angle ABC=90°$，∴ $\angle OEB=90°$. ∵ OE 为⊙O 的半径，∴ BE 是⊙O 的切线.

(2)【解】在 Rt△ABC 中，点 E 为 AC 的中点，∴ $BE=CE=AE=BC$，∴ $BC=\dfrac{1}{2}AC$，∴ 易得 $\angle BAC=30°$，∴ $\angle ACB=60°$，$\angle EBO=30°$. 在 Rt△BOE 中，$OE=1$，∴ $OB=2OE=2$，∴ $BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=\sqrt{3}$，$AB=1+2=3$，∴ $BC=BE=\sqrt{3}$，∴ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $AB\cdot BC=3\sqrt{3}$.

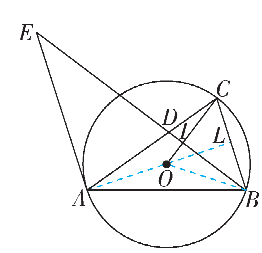
8. (1)【证明】连接 OE，OC，如图所示.



∵ AD 是⊙O 的直径，且⊙O 恰好经过点 E，∴ $OA=OE$. 在△OAC 和△OEC 中，
$$\begin{cases}OA=OE,\\OC=OC,\\CA=CE,\end{cases}$$
∴ △OAC ≌ △OEC（SSS），∴ $\angle OAC=\angle OEC=90°$，∴ $OE\perp BC$. 又∵ OE 是⊙O 的半径，∴ BC 是⊙O 的切线.

(2)【解】设⊙O 的半径为 R，∴ $OA=OD=OE=R$，$AD=2R$. ∵ $BE=2BD=6$，∴ $BD=3$，∴ $OB=OD+BD=R+3$. 由(1)可知 $OE\perp BC$，∴ △BOE 是直角三角形. 在 Rt△BOE 中，$BE=6$，$OB=R+3$，$OE=R$，由勾股定理得 $OB^2=BE^2+OE^2$，∴ $(R+3)^2=6^2+R^2$，解得 $R=4.5$，∴ $AD=2R=9$，∴ $AB=AD+BD=9+3=12$. 设 $CA=CE=a$，则 $BC=BE+CE=6+a$. 在 Rt△ABC 中，由勾股定理得 $BC^2=AC^2+AB^2$，∴ $(6+a)^2=12^2+a^2$，解得 $a=9$，∴ $AC=9$. 在 Rt△ACD 中，$\tan\angle ACD=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{9}{9}=1$.

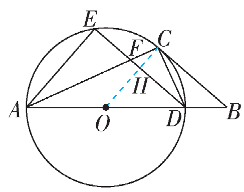
9. (1)【证明】连接 AO 并延长交 BC 于点 L，连接 OB，如图. ∵ $AB=AC$，$OB=OC$，∴ AL 垂直平分 BC. ∵ $AE/\!/BC$，∴ $\angle OAE=\angle OLB=90°$，即 $OA\perp AE$. ∵ OA 是⊙O 的半径，∴ 直线 AE 为⊙O 的切线.



(2)【解】设 BD 交 OC 于点 I，如图. ∵ $AB=AC$，∴ $\angle ACB=\angle ABC$. ∵ $BD\perp OC$，∴ $\angle DIC=90°$. ∵ $OC=OA$，∴ $\angle OCA=\angle OAC$，∴ $\angle EDA=\angle BDC=90°-\angle OCA=90°-\angle OAC=$

$\angle EAD$. ∵ $\angle EAD=\angle BCD=\angle ABC$, ∴ $\angle BDC=\angle ABC$. ∵ $\angle BCD=\angle ACB$, $AB=AC=5$, $BC=\sqrt{10}$, ∴ $\triangle BCD\backsim\triangle ACB$, ∴ $\frac{BC}{AC}=\frac{DC}{BC}$, ∴ $DC=\frac{BC^2}{AC}=\frac{(\sqrt{10})^2}{5}=2$, ∴ $DA=AC-DC=5-2=3$. ∵ $\angle EAD=\angle ACB$, $\angle EDA=\angle EAD=\angle ABC$, ∴ $\triangle EAD\backsim\triangle ACB$, ∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{DA}{BC}$, ∴ $AE=\frac{DA\cdot AC}{BC}=\frac{3\times5}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$, ∴ AE 的长是$\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

10. (1)【证明】连接 OC,如图.



∵ AD 为⊙O 的直径, ∴ $\angle ACD=90°$, ∴ $\angle ACO+\angle OCD=90°$. ∵ $OA=OC$, ∴ $\angle DAC=\angle ACO$. ∵ $\angle BCD=\angle DAC$, ∴ $\angle BCD=\angle ACO$, ∴ $\angle BCD+\angle OCD=90°$, ∴ $\angle OCB=90°$, 即 $BC\perp OC$. ∵ OC 为⊙O 的半径, ∴ BC 为⊙O 的切线.

(2)【证明】∵ 点 C 是劣弧 $\overset{\frown}{ED}$ 的中点, ∴ $\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{CD}$, ∴ $\angle CDE=\angle CAD$. ∵ $\angle FCD=\angle DCA$, ∴ $\triangle FCD\backsim\triangle DCA$, ∴ $\frac{CD}{CF}=\frac{CA}{CD}$, ∴ $CD^2=CF\cdot AC$.

(3)【解】设 OC 与 DE 交于点 H,如图. ∵ 点 C 是劣弧 $\overset{\frown}{ED}$ 的中点, ∴ $OC\perp DE$, $EH=DH$. 由(1)知 $OC\perp BC$, ∴ $DE/\!/BC$, ∴ $\angle ADE=\angle B$, ∴ $\sin\angle ADE=\sin B=\frac{3}{5}$. ∵ AD 为⊙O 的直径, ∴ $\angle AED=90°$, ∴ $\sin\angle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{3}{5}$. ∵ ⊙$O$ 的半径 $OA=5$, ∴ $AD=10$, ∴ $AE=6$, ∴ $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=8$, ∴ $EH=HD=4$, ∴ $OH=\sqrt{OD^2-DH^2}=3$, ∴ $CH=OC-OH=5-3=2$, ∴ $CD=\sqrt{CH^2+DH^2}=2\sqrt{5}$, ∴ $AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=4\sqrt{5}$. 由(2)知 $CD^2=CF\cdot AC$, ∴ $CF=\frac{CD^2}{AC}=\frac{20}{4\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

方法技巧

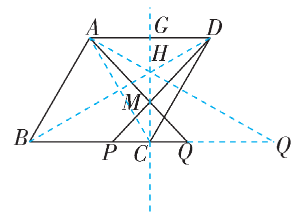
圆中常作的辅助线

在对圆的有关题目进行计算或证明时,往往需要添加辅助线,常见作法如下:有切点,连半径;有关弦的计算,常作表示弦心距的线段或连接半径;有直径,作直径所对的圆周角;圆中有45°的圆周角时,作同弧所对的90°的圆心角等.

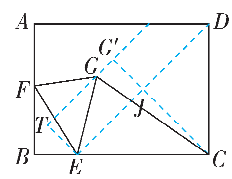
专题12 主从联动问题

刷难关

1. B 【解析】如图,过 C 作 $CG\perp BC$,交 AD 于点 G,作 B 关于 C 的对称点 Q',连接 AC, BD, AQ', BD 和 AQ' 交于点 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC=60°$, ∴ $AD/\!/BC$, $AD=CD$, $\angle ADC=\angle ABC=60°$, ∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形, ∴ CG 垂直平分 AD. ∵ P, Q 关于点 C 对称, ∴ M 一定在直线 CG 上. 同理可得点 H 一定在直线 CG 上. ∵ P 从点 B 运动到点 C, ∴ 可以得到点 M 的运动轨迹就是线段 CH. ∵ $AB=1=CD$, ∴ $CG=CD\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∵ $AD/\!/BC$, ∴ $\triangle AHD\backsim\triangle Q'HB$, ∴ $\frac{GH}{CH}=\frac{AD}{BQ'}=\frac{1}{2}$, ∴ $CH=\frac{2}{3}CG=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即点 M 的运动路径长为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



2. $2+3\sqrt{2}$ 【解析】如图,将线段 BE 绕点 E 顺时针旋转45°得到线段 TE,连接 GT. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $AB=CD=6$, $\angle B=\angle BCD=90°$. ∵ $\angle BET=\angle FEG=45°$, ∴ $\angle BEF=\angle TEG$. 在△EBF 和△ETG 中, $\begin{cases}EB=ET,\\ \angle BEF=\angle TEG,\\ EF=EG,\end{cases}$ ∴ $\triangle EBF\cong\triangle ETG$ (SAS), ∴ $\angle B=\angle ETG=90°$, ∴ 点 G 在射线 TG 上运动, ∴ 当 $CG\perp TG$ 时, CG 的值最小. 如图,连接 DE,过点 C 作 $CG'\perp TG$,交 ED 于 J,交 TG 的延长线于 G'. ∵ $BC=8$, $BE=2$, $CD=6$, ∴ $CE=CD=6$, ∴ $DE=6\sqrt{2}$, $\angle CED=\angle BET=45°$, ∴ $\angle TEJ=\angle ETG'=\angle JG'T=90°$, ∴ 四边形 $ETG'J$ 是矩形, ∴ $DE/\!/G'T$, $G'J=TE=BE=2$, ∴ $CJ\perp DE$, ∴ $JE=JD$, ∴ $CJ=\frac{1}{2}DE=3\sqrt{2}$, ∴ $CG'=CJ+G'J=2+3\sqrt{2}$, ∴ CG 的最小值为 $2+3\sqrt{2}$,故答案为 $2+3\sqrt{2}$.

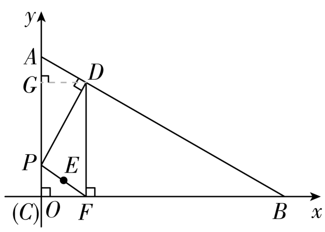


3. $\frac{\sqrt{19}}{4}$ 【解析】以 C 为原点,建立如图所示的坐标系,设 $AP=a$,则 $CP=2-a$,则 $P(0,2-a)$. ∵ $\angle B=30°$, ∴ $\angle BAC=60°$. ∵ $PD\perp AB$, ∴ $\angle PDA=90°$, ∴ $\angle APD=30°$, ∴ $AD=\frac{1}{2}AP=\frac{a}{2}$. 过点 D 作 $DG\perp AC$,则 $\angle AGD=90°$, ∴ $AG=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{4}$, ∴ $DG=\sqrt{3}AG=\frac{\sqrt{3}}{4}a$. ∵ $DF\perp BC$, $DG\perp AC$, $\angle ACB=90°$, ∴ 四边形 $DGCF$ 为矩形, ∴ $DG=CF$, ∴ $F\left(\frac{\sqrt{3}a}{4},0\right)$. ∵ E 为 PF 的中点, ∴ $E\left(\frac{\sqrt{3}}{8}a,1-\frac{1}{2}a\right)$.

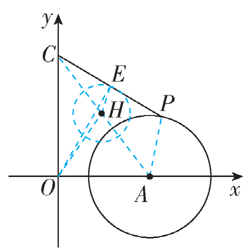
令 $x=\frac{\sqrt{3}}{8}a$, $y=1-\frac{1}{2}a$,则 $y=1-\frac{4\sqrt{3}}{3}x$,

∴ 点 E 在直线 $y=1-\frac{4\sqrt{3}}{3}x$ 上运动.

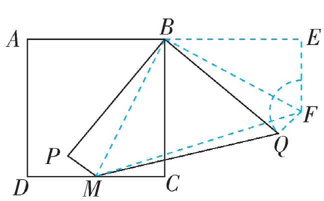
当点 P 与 A 重合时,$a=0$,此时 $E(0,1)$,当点 P 与 C 重合时,$a=2$,此时 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$,∴ 点 E 所经过的路径长为 $\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{4}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{19}}{4}$.



4. 1.5 【解析】如图,连接 AC,AP,取 AC 的中点 H,连接 EH,OH. ∵ $CE=EP$,$CH=AH$,∴ $EH=\frac{1}{2}PA=1$,∴ 点 E 的运动轨迹是以 H 为圆心,1 为半径的圆. ∵ $C(0,4)$,$A(3,0)$,∴ $H(1.5,2)$,∴ $OH=\sqrt{2^2+1.5^2}=2.5$,∴ OE 的最小值为 $OH-EH=2.5-1=1.5$,故答案为 1.5.

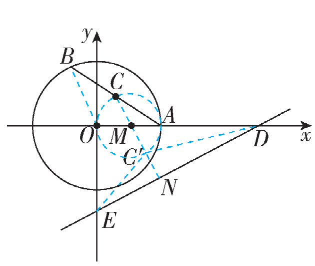


5. $2\sqrt{10}-1$ 【解析】连接 BM,将△BCM 绕 B 逆时针旋转 90°得到△BEF,连接 MF,QF,如图.



∵ $\angle CBE=90°$,$\angle ABC=90°$,∴ $\angle ABC+\angle CBE=180°$,∴ A,B,E 三点共线. ∵ $\angle PBM=90°-\angle MBQ=\angle FBQ$,由旋转的性质得 $PB=QB$,$MB=FB$,∴ $\triangle BPM\cong\triangle BQF$(SAS),∴ $MP=QF=1$,∴ Q 的运动轨迹是以 F 为圆心,1 为半径的弧. ∵ $CD=BC=AB=4$,∴ $CM=\frac{1}{2}CD=2$,∴ $BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=2\sqrt{5}$. ∵ $\angle MBF=90°$,$BM=BF$,∴ $MF=\sqrt{2}BM=2\sqrt{10}$. ∵ $MQ\geqslant MF-QF$,∴ $MQ\geqslant 2\sqrt{10}-1$,∴ MQ 的最小值为 $2\sqrt{10}-1$. 故答案为 $2\sqrt{10}-1$.

6.【解】如图,连接 OB,取 OA 的中点 M,连接 CM,过点 M 作 $MN\perp DE$ 于 N.



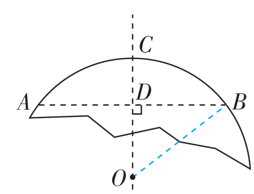
∵ $AC=CB$,$AM=OM$,∴ $MC=\frac{1}{2}OB=1$,∴ 点 C 的运动轨迹是以 M 为圆心,1 为半径的圆. 设⊙M 交 MN 于 C',连接 $C'D$,$C'E$. ∵ 直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 D,E,∴ 易得 $D(4,0)$,$E(0,-3)$,∴ $OD=4$,$OE=3$,∴ $DM=4-1=3$,$DE=\sqrt{OE^2+OD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. ∵ $\angle MDN=\angle ODE$,$\angle MND=\angle DOE=90°$,∴ $\triangle DNM\backsim\triangle DOE$,∴ $\frac{MN}{OE}=\frac{DM}{DE}$,∴ $\frac{MN}{3}=\frac{3}{5}$,∴ $MN=\frac{9}{5}$,∴ $C'N=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$. 当点 C 与点 C' 重合时,$\triangle C'DE$ 的面积最小,最小值为 $\frac{1}{2}\times5\times\frac{4}{5}=2$.

C 检测验收练

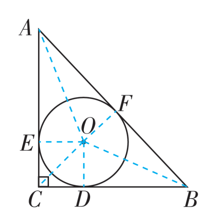
刷速度

1. C 【解析】∵ $\angle BOC=2\angle A$,$\angle A=66°$,∴ $\angle BOC=132°$. ∵ $OB=OC$,∴ $\angle OCB=\frac{1}{2}\times(180°-132°)=24°$. ∵ $BD\parallel OC$,∴ $\angle CBD=\angle OCB=24°$,故选 C.

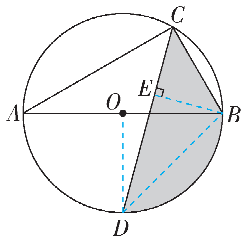
2. C 【解析】设圆心为 O,连接 OB,如图所示. ∵ CD 垂直平分 AB,$AB=40$ cm,∴ $BD=20$ cm. ∵ $OC=OB$,∴ $OD=OB-CD$. ∵ $\angle ODB=90°$,∴ $OD^2+BD^2=OB^2$,∴ $(OB-10)^2+20^2=OB^2$,解得 $OB=25$,即圆形工件的半径为 25 cm,故选 C.



3. D 【解析】如图,作 $OE\perp AC$ 于点 E,$OD\perp BC$ 于点 D,$OF\perp AB$ 于点 F,连接 OA,OB,OC. 易证四边形 $OECD$ 是正方形. 设 $OE=OD=OF=r$,则 $EC=CD=r$,∴ $AE=AF=b-r$,$BD=BF=a-r$. ∵ $AF+BF=AB$,∴ $b-r+a-r=c$,∴ $r=\frac{a+b-c}{2}$,∴ $d=a+b-c$,故选项 A 正确. ∵ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOB}$,∴ $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$,∴ $ab=r(a+b+c)$,∴ $r=\frac{ab}{a+b+c}$,即 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$,故选项 B 正确. ∵ $d=a+b-c$,∴ $d^2=(a+b-c)^2=(a+b)^2-2c(a+b)+c^2=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$. ∵ $a^2+b^2=c^2$,∴ $d^2=2c^2+2ab-2ac-2bc=2(c^2+ab-ac-bc)=2[(c^2-ac)+b(a-c)]=2(c-a)\cdot(c-b)$,∴ $d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$,故选项 C 正确. 排除法可知选项 D 错误. 故选 D.



4. B 【解析】连接 OD,BD,作 $BE\perp DC$ 于点 E,如图所示. ∵ AB 为直径,∴ $\angle ACB=90°$. ∵ CD 平分 $\angle ACB$,∴ $\angle BCD=45°$,∴ $\angle DOB=2\angle BCD=90°$,$\triangle BCE$ 为等腰直角三角形.

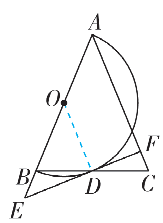


$\because \angle A=30^\circ, AB=4, \therefore BC=\frac{1}{2}AB=2, \therefore CE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}$. $\because \angle CDB=\angle A=30^\circ, \therefore DE=\frac{BE}{\tan 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{6}, \therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times CD\times BE=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sqrt{2}=1+\sqrt{3}$. $\because S_{弓形BD}=S_{扇形OBD}-S_{\triangle OBD}=\frac{90\pi\times 2^2}{360}-\frac{1}{2}\times 2\times 2=\pi-2$, ∴ 阴影部分的面积为 $S_{\triangle BCD}+S_{弓形BD}=\sqrt{3}+\pi-1$. 故选 B.

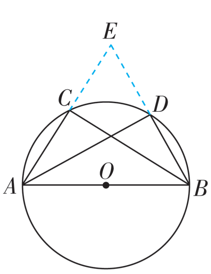
5. 90 【解析】∵ AB 是圆的直径, ∴ AB 所对的弧是半圆, 所对圆心角的度数为 180°. ∵ $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ 所对的弧所对的圆心角的和等于弧 AB 所对的圆心角, $\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$, 故答案为 90.

6. 68° 或 112° 【解析】$\because \angle BPC=124^\circ, \therefore \angle PBC+\angle PCB=180^\circ-124^\circ=56^\circ$. ∵ BP 平分 $\angle ABC$, CP 平分 $\angle ACB$, $\therefore \angle ABC=2\angle PBC, \angle ACB=2\angle PCB, \therefore \angle ABC+\angle ACB=2(\angle PBC+\angle PCB)=112^\circ, \therefore \angle BAC=180^\circ-112^\circ=68^\circ$. 当 M 在优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上时, $\angle BMC=\angle BAC=68^\circ$; 当 M 在劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上时, 由圆内接四边形的性质得 $\angle BMC=180^\circ-68^\circ=112^\circ$. 故 $\angle BMC=68^\circ$ 或 112°. 故答案为 68° 或 112°.

7. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ 【解析】如图, 连接 OD. $\because AB=AC=6, \therefore OA=OD=3, \angle ABC=\angle C$. $\because OB=OD, \therefore \angle ABC=\angle ODB, \therefore \angle ODB=\angle C, \therefore OD /\!/ AF$. ∵ EF 是半圆 O 的切线, $\therefore OD\perp EF$, ∴ 在 Rt$\triangle ODE$ 中, $OD^2+DE^2=OE^2, \therefore 3^2+(\sqrt{7})^2=OE^2, \therefore OE=4, \therefore AE=7$. $\because OD /\!/ AF, \therefore \frac{OE}{AE}=\frac{DE}{EF}, \therefore \frac{4}{7}=\frac{\sqrt{7}}{EF}, \therefore EF=\frac{7\sqrt{7}}{4}, \therefore DF=EF-DE=\frac{3\sqrt{7}}{4}$. 故答案为 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

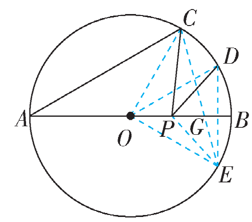


8. 8 【解析】延长 AC, BD 交于 E, 如图所示. ∵ AB 是⊙O 的直径, $\therefore BD\perp AD, BC\perp AC, \therefore \angle ADB=\angle ADE=\angle BCE=90^\circ$. ∵ AD 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAD=\angle DAE=\angle CBD$. $\because AD=AD, \therefore \triangle BAD\cong\triangle EAD$ (ASA), $\therefore BD=DE=2\sqrt{5}, \therefore BE=4\sqrt{5}$. $\because AB=10, BD=2\sqrt{5}, \therefore AD=4\sqrt{5}$. $\because \angle DAB=\angle CBD, \angle ADB=\angle BCE=90^\circ, \therefore \triangle ABD\backsim\triangle BEC, \therefore \frac{BE}{AB}=\frac{BC}{AD}, \therefore \frac{4\sqrt{5}}{10}=\frac{BC}{4\sqrt{5}}, \therefore BC=8$. 故答案为 8.



9. $3\sqrt{2}$ 【解析】如图, 作点 D 关于 AB 的对称点 E, 连接 CE 交 AB 于点 G, 连接 OC, OD, OE, PE, $\therefore PD=PE, AB\perp DE, \therefore PC+PD=PC+PE\geqslant CE$. 当点 P 与点 G 重合时, $PC+PD$ 有最小值, 最小值为 CE 的长. $\because \angle CAB=30^\circ, \therefore \angle COB=2\angle CAB=60^\circ$. $\because \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}, \therefore \angle COD=\angle DOB=\frac{1}{2}\angle COB=30^\circ$. $\because AB\perp DE, \therefore \overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BE}, \therefore \angle BOE=\angle DOB=30^\circ, \therefore \angle COE=\angle COB+\angle BOE=90^\circ$.

$\because OC=OE, \therefore \triangle COE$ 是等腰直角三角形. $\because AB=6, \therefore OC=OE=3, \therefore CE=\sqrt{OC^2+OE^2}=3\sqrt{2}$, ∴ $PC+PD$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$, 故答案为 $3\sqrt{2}$.



10. $4\,047\pi$ 【解析】由题意可知, 曲线 $DA_1B_1C_1D_1A_2B_2\cdots$ 是由很多段 90° 的圆心角所对的弧组成的, $AD=AB=AA_1=1, BA_1=BB_1=BA+AA_1=1+1=2, CC_1=CB+BB_1=1+2=3, DD_1=DC+CC_1=1+3=4, AD_1=AD+DD_1=AA_2=5, \cdots$, 以此类推, 发现后一段 90° 的圆心角所对的弧的半径比相邻的前一段 90° 的圆心角所对的弧的半径长 1, $AD_{n-1}=AA_n=4(n-1)+1, \therefore BA_n=4(n-1)+2, \therefore BA_{2\,024}=4\times(2\,024-1)+2=8\,094, \therefore \overset{\frown}{A_{2\,024}B_{2\,024}}$ 的长为 $\frac{90}{180}\times 8\,094\pi=4\,047\pi$, 故答案为 $4\,047\pi$.

11. (1)【证明】$\because OA\perp l, \therefore \angle BAC=90^\circ$,

$\therefore \angle ACB+\angle ABC=90^\circ$.

$\because OP=OB, \angle OBP=\angle ABC, \therefore \angle OPB=\angle OBP=\angle ABC$.

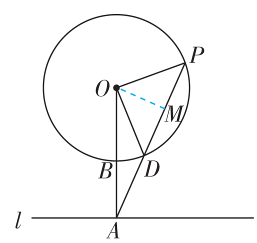
$\because AP=AC, \therefore \angle ACB=\angle APC$,

$\therefore \angle OPB+\angle APC=\angle ABC+\angle ACB=90^\circ$,

即 $\angle OPA=90^\circ$.

∵ OP 是⊙O 的半径, ∴ AP 是⊙O 的切线.

(2)【解】如图, 过点 O 作 $OM\perp AP$, 垂足为 M, 则 $DM=PM=\frac{1}{2}PD$. $\because \angle POD=90^\circ, OP=OD$, ∴ 易证 $\triangle OMD$ 是等腰直角三角形, $\therefore OM=DM=\frac{\sqrt{2}}{2}OD$.



设⊙O 的半径为 r, 则 $OM=DM=\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

在 Rt$\triangle AOM$ 中, $OA=\sqrt{10}, OM=\frac{\sqrt{2}}{2}r, AM=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}r$,

由勾股定理得 $OM^2+AM^2=OA^2$,

即 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2=(\sqrt{10})^2$,

解得 $r=2$(负值已舍去),

∴ ⊙O 的半径为 2.

12. (1)【**证明**】∵ CD 是⊙O 的直径,∴ $\angle CBD=90°$,∴ $\angle CBO+\angle OBD=90°$. ∵ $\angle ABD=\angle CBO$,∴ $\angle ABD+\angle OBD=90°$,即 $\angle ABO=90°$,∴ $OB\perp AB$. 又∵ OB 是⊙O 的半径,∴ AB 是⊙O 的切线.

(2)【**解**】∵ ⊙O 的半径为 1,∴ $OB=OC=OD=1$. 由(1)可知 $\angle ABO=90°$. ∵ D 为 AO 的中点,∴ $BD=OD=AD=1$,∴ $OB=OD=BD$,∴ △BOD 是等边三角形,∴ $\angle BOD=60°$,

∴ $\angle BOC=180°-\angle BOD=120°$,

∴ 劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的长为$\frac{120\pi\times1}{180}=\frac{2\pi}{3}$.

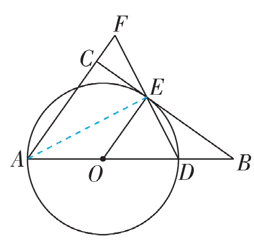
13. (1)【**证明**】∵ ⊙O 与 BC 相切于点 E,∴ $OE\perp BC$,

∴ $\angle BEO=90°$. ∵ $\angle ACB=90°$,

∴ $\angle ACB=\angle BEO$,∴ $AC/\!/OE$,∴ $\angle F=\angle OED$. ∵ $OE=OD$,

∴ $\angle OED=\angle ODE$,∴ $\angle F=\angle ODE$.

(2)【**解**】如图,连接 AE.



∵ AD 是直径,∴ $\angle AED=90°$,

∴ $\angle AEF=90°$. ∵ $\angle F=\angle ODE$,

∴ $\tan F=\tan\angle ODE=2$,$AF=AD$.

∵ $\angle ACB=90°$,∴ $\angle ECF=90°$.

在 Rt△CEF 中,$\tan F=\frac{CE}{CF}=2$.

∵ $CF=2$,∴ $CE=4$,∴ 由勾股定理得 $EF=\sqrt{CF^2+CE^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 在 Rt△$AEF$ 中,∵ $\tan F=\frac{AE}{EF}=2$,∴ $AE=2EF=4\sqrt{5}$,

∴ 由勾股定理得 $AF=\sqrt{EF^2+AE^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2}=10$,

∴ $AD=AF=10$,∴ ⊙O 的半径的长为 5.

14. (1)【**证明**】如图(1),连接 OE,过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G.

∵ ⊙O 与 AD 相切于点 E,∴ $OE\perp AD$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,AC 是正方形的对角线,

∴ $\angle BAC=\angle DAC=45°$,∴ $OE=OG$.

∵ OE 为⊙O 的半径,

∴ OG 为⊙O 的半径.

∵ $OG\perp AB$,∴ AB 与⊙O 相切.

【**解**】(2)如图(1),易得四边形 $AEOG$ 是正方形.

设 $AE=OE=OC=R$.

在 Rt△AEO 中,∵ $AE^2+EO^2=AO^2$,

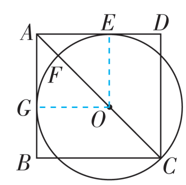
∴ $AO=\sqrt{2}R$.

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{2}+1$,

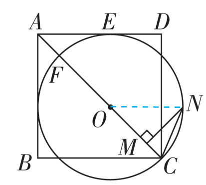
∴ 在 Rt△ADC 中,$AC=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

∵ $OA+OC=AC$,∴ $\sqrt{2}R+R=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$,

∴ $R=\sqrt{2}$,∴ ⊙O 的半径为$\sqrt{2}$.



图(1)



图(2)

(3)如图(2),连接 ON,设 $CM=k$.

∵ $CM:FM=1:4$,∴ $CF=5k$,∴ $OC=ON=2.5k$,∴ $OM=OC-CM=1.5k$.

在 Rt△OMN 中,由勾股定理得 $MN=2k$.

在 Rt△CMN 中,由勾股定理得 $CN=\sqrt{5}k$.

又由(2)得 $FC=5k=2\sqrt{2}$,∴ $k=\frac{2\sqrt{2}}{5}$,∴ $CN=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

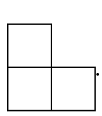
第七章 图形的变换

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

1. C 【**解析**】A 选项,不是轴对称图形,故此选项不符合题意;B 选项,不是轴对称图形,故此选项不符合题意;C 选项,是轴对称图形,故此选项符合题意;D 选项,不是轴对称图形,故此选项不符合题意. 故选 C.

2. A 【**解析**】该纸杯的主视图是选项 A,故选 A.

3. A 【**解析**】该几何体的左视图是  故选 A.

4. D 【**解析**】将点 $P(3,5)$ 向上平移 2 个单位长度,则其横坐标不变,纵坐标增加 2,所以点 P'的坐标为(3,7). 故选 D.

5. D 【**解析**】由折叠的性质可得 $AE=AB=4$,$DE=DB$,∴ $CE=AC-AE=6-4=2$,∴ $C_{\triangle CDE}=CE+CD+DE=CE+CD+DB=CE+CB=2+5=7$. 故选 D.

6. 3 【**解析**】由作图方法可得,MN 垂直平分 AB,∴ 点 D 为 AB 的中点. 又∵ 点 E 是 AC 的中点,∴ DE 是△ABC 的中位线,

∴ $DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times6=3$,故答案为 3.

7.【**解**】(1)∵ $AB=AC$,$\angle B=72°$,∴ $\angle ACB=\angle B=72°$.

由作图可知,CD 是 $\angle ACB$ 的平分线,∴ $\angle BCD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=36°$.